Fabio Chalub
Universidade Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

DA **TERCEIRA** PARA A **QUARTA DIMENSÃO**

Há muito tempo se conhecem os polígonos (em duas dimensões), poliedros (em três dimensões) e politopos (em quatro ou mais dimensões) regulares: infinitos no caso plano, cinco para o nosso espaço usual, seis na quarta dimensão e apenas três daí por diante. Mas até agora o estudo tem sido feito para cada caso separadamente. Uma nova investigação mostra como podemos aumentar as dimensões aos poucos e construir os politopos quadridimensionais a partir dos cinco sólidos platónicos.

Vamos desenhar um polígono. Mas não um polígono qualquer, e sim um polígono regular, aquele cujos lados e vértices são todos iguais (neste texto, vamos falar apenas do caso convexo). É fácil ver que existem polígonos regulares qualquer que seja o número de lados da encomenda (a partir de 3).

Desenhe um círculo centrado na origem e marque um ponto qualquer sobre este. Divida o ângulo de uma volta completa (2π radianos) pelo número de lados n, e em ângulos igualmente espaçados marque um ponto. O ponto n+1 será novamente o ponto inicial. Ligue cada ponto aos seus dois vizinhos imediatos por seguimentos de retas e, *voilà*, o polígono está feito, com os seus n lados e vértices, todos idênticos.

Agora pegue na folha de papel e rode ligeiramente. Quando tivermos mudado a sua orientação pelo mesmo ângulo usado na construção, ou seja, $2\pi/n$, teremos uma figura em tudo idêntica à original. Dizemos que a figura possui uma simetria de rotação pelo ângulo $2\pi/n$. Evidentemente, esta não é a única simetria: muitas outras rotações são possíveis, e mesmo reflexões e inversões que a preservem (ou seja, quando a imagem da figura é ela própria). *Grosso modo*, o conjunto de transformações que preserva o polígono constitui um exemplo daquilo a que os matemáticos chamam *grupo*: um conjunto com uma operação que satisfaz uma série de regras.

Pensar num quadrado como um objeto com simetria de rotação de 90º parece mais complicado do que o necessário, mas há ganhos na abstração – ou seja, em pensar nos exemplos concretos como casos particulares de uma descrição que vai muito para além dos mesmos. A principal vantagem é permitir estudar situações mais complicadas, nas quais a nossa intuição de pouco nos vale.

Vamos agora para as três dimensões: o que seria, então, o equivalente dos polígonos regulares? Aqui podemos apreciar a particularidade da existência de infinitos polígonos regulares, pois só há cinco poliedros regulares, conhecidos como "sólidos platónicos". Os poliedros são constituídos por faces (figuras planas que os delimitam), arestas (linhas retas nas fronteiras das faces) e vértices (pontos que marcam as extremidades de cada aresta). Se todos estes forem iguais entre si, dizemos que o poliedro é regular.

Já fica claro o que acontece: rotações em três dimensões são muito mais complicadas do que em duas dimensões e não há grupos de simetria que correspondam a sólidos com qualquer número de vértices.

Os cinco sólidos platónicos são o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, cada qual com 4, 6, 8, 12 e 20

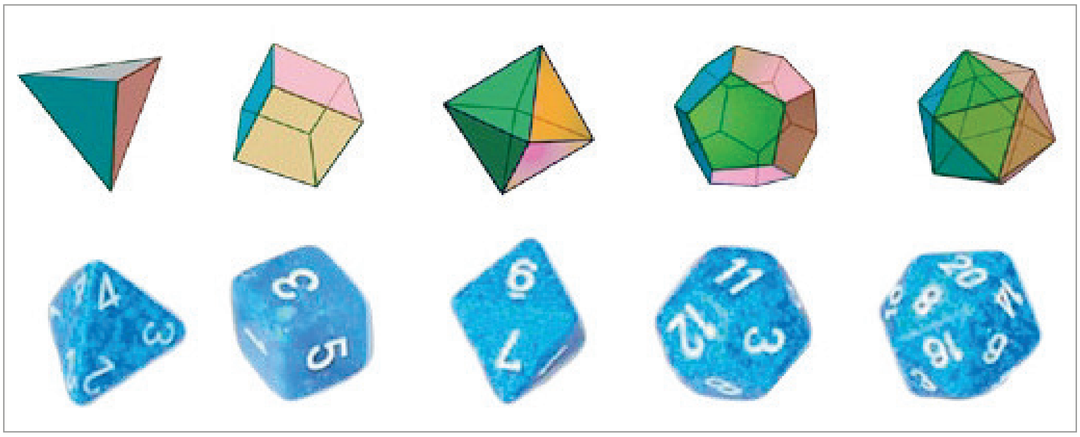


Figura 1. Em cima, os sólidos platónicos de 4, 6, 8, 12 e 20 lados (tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro, respetivamente). Em baixo, os únicos dados honestos possíveis, pois a probabilidade de cair qualquer um dos lados voltado para cima é a mesma. (Fonte: Wikimedia Commons).

faces, respetivamente. Veja a figura 1. Estes são tão especiais que o filósofo grego, na obra *Timeu*, supôs serem parte de um princípio organizador do Universo. Mesmo mais de mil anos depois, o grande astrónomo Kepler continuava a procurar neles grandes princípios cosmológicos. Veja a figura 2.

Além das simetrias de rotação, reflexão e inversão que com um pouco de imaginação podem ser vistas para cada uma das figuras, há uma outra estrutura importante: a dualidade. Explicitamente, considere o cubo, marque o ponto central de cada face e ligue cada ponto aos pontos das faces adjacentes. Construímos, então, um octaedro. Faça o mesmo com o octaedro, e temos um cubo. É mais difícil visualizar, mas a figura dual do icosaedro é o dodecadro e vice-versa. Isto indica que as simetrias do cubo e do octaedro são as mesmas, assim como as das figuras de 12 e 20 faces. O tetraedro é um caso à parte, pois é autodual, ou seja, marcando os centros das suas faces e ligando estes pontos, encontramos um novo tetraedro.

E o que é que acontece em dimensões mais altas? Neste caso, a visualização do objeto de pouco nos vale e é realmente necessário recorrer às estruturas matemáticas abstratas. Para começar, em todas as dimensões há um *hipercubo*, uma figura obtida considerando o produto cartesiano dos intervalos [0,1] tantas vezes quanto quisermos. A *hiperface* é também um hipercubo, com uma dimensão a menos, e desta forma o hipercubo é um *politopo* regular. (Chamamos assim à generalização para dimensões arbitrárias dos polígonos e poliedros.) Tomando o ponto central de cada hiperface e ligando cada uma aos adjacentes, temos o *hiperoctaedro*, que portanto também existe em todas as dimensões. E finalmente temos o *hipersimplex*, a generalização do tetraedro. Este é definido (em termos de coordenadas cartesianas) como o subconjunto de $\mathbb{R}^n$, dado pelos vetores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tais que $x_i \geq 0$ e $\sum_i x_i \leq 1$. Como no caso tridimensional, este é autodual.

E será que existem outros? Vamos ter de recorrer à álgebra e aos seus estudos da simetria. O resultado não poderia ser mais surpreendente: além do que foi descrito no parágrafo acima, só existem mais três politopos regulares e todos em dimensão 4. Evidentemente, a sua visualização não é fácil, mas podemos recorrer a um artifício. Quando queremos construir um cubo, desenhamos seis quadrados no papel, com uma estrutura próxima de uma cruz, cortamos e, colando

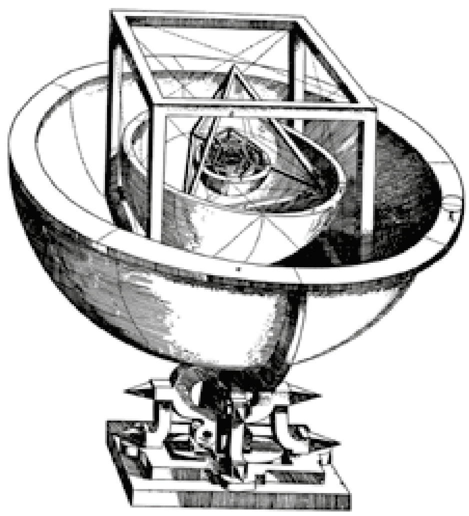


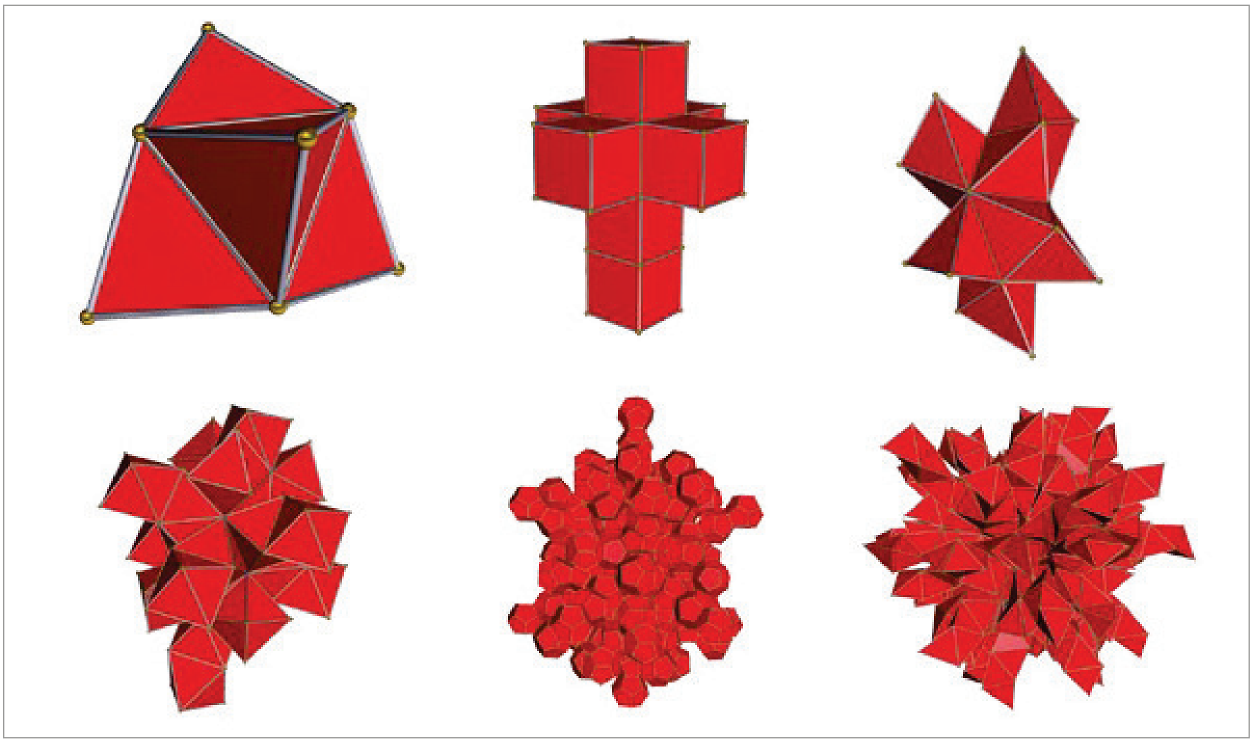
Figura 2: A busca de harmonização do mundo natural pela excecionalidade dos sólidos platónicos. Com uma boa dose de imaginação, o astrónomo Johann Kepler *encaixou* as posições relativas dos planetas nos polígonos regulares, relacionando o raio das suas órbitas com a razão das figuras inscritas. (Fonte: Wikimedia Commons).

as arestas corretas, temos a figura tridimensional desejada. Para um tetraedro, podemos fazer algo similar, desenhando quatro triângulos contíguos e dobrando-os adequadamente. O mesmo ocorre na próxima dimensão: colamos num arranjo preciso um certo número de poliedros regulares e depois dobramos, na quarta dimensão, a figura obtida. Veja a figura 3.

Em toda esta análise, a construção foi feita em cada dimensão em separado, a partir do estudo dos grupos de simetria de cada distinto espaço. Em nenhum momento foi usado algo que de certa forma até é óbvio: que para corretamente construir um politopo em dimensão n é necessário conhecer os politopos de dimensão $n-1$ (que são as suas hiperfaces) -- ou seja, há uma forma natural de fazer esta construção subindo a escada da dimensionalidade, um degrau de cada vez. Foi esta abordagem que o artigo [1] optou por fazer. Assim, estudando as rotações em quatro dimensões dos sólidos platónicos, o físico e matemático Dechant reproduziu toda a análise acima usando uma estrutura matemática mais simples e mais elegante. Valeu-se de trabalho de grandes matemáticos do século XIX, tais como Grassmann, Hamilton e Clifford, e de um dos maiores geómetras do século XX, o britânico e canadiano Harold Scott MacDonald Coxeter, que já havia dedicado grande parte dos seus esforços ao estudo dos politopos. Curiosamente, uma das estruturas centrais no trabalho de Dechant é o *spinor*, um objeto cuja origem está fundamentalmente nos estudos de simetrias do século XIX, mas cujo estudo foi muito impulsionado pela mecânica quântica. Toda a excecionalidade dos politopos regulares que não os hipercubos, hipersimplexos e hiperoctaedros é muito mais naturalmente compreendida nesta abordagem.

REFERÊNCIAS

[1] Pierre-Philippe Dechant. "Platonic Solids Generate Their Four-dimensional Analogues". Acta Cryst. A69, 592-602 (2013).



▲Figura 3: Construção dos seis politopos regulares a partir de poliedros regulares, colocados estrategicamente colados uns aos outros. Tudo o que nos falta é dobrar a figura acima no espaço quadridimensional. O primeiro exemplo é do hipersimplexo (com cinco hiperfaces tetraedrais) e o segundo exemplo é do hipercubo (oito faces cúbicas). As restantes têm, respetivamente, 16, 24, 120 e 600 hiperfaces. **(Fonte: Wikimedia Commons)**.