Fabio Chalub
Universidade Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

O **LOGARITMO** DOS **ESTÍMULOS**

"A sensação é proporcional ao logaritmo dos estímulos." Já ouviu isto antes? Se ouviu, então já conhece a lei de Weber-Fechner. Se nunca ouviu, mesmo assim não pode ter escapado às suas aplicações. Como, por exemplo, o facto de que é necessário elevar ao quadrado a intensidade sonora, para que a altura do som seja percebida como tendo dobrado. No entanto, porque é que é assim? Em princípio, há muitas outras possibilidades para relacionar sensação e estímulo. Uma recente investigação em matemática e psicologia mostra como a lei do logaritmo tem uma função central na sobrevivência dos nossos antepassados num mundo onde erros de perceção podem ser fatais.

No séc. XIX, o médico alemão Ernst Weber fez um interessante experimento. Deu dois pesos, de diferentes valores, a várias pessoas, e perguntou qual era o maior. Às vezes a resposta era óbvia, pois todos percebemos a diferença entre um e de dois quilogramas. Por vezes, a diferença era tão subtil, de uns poucos gramas por quilo, que ninguém via claramente qual era o de maior valor. De facto, o que Weber constatou era que a diferença que tornava a maioria das pessoas capaz de detetar corretamente o maior peso era proporcional às quantidades envovidas. Assim, se é necessário uma diferença de 10 gramas para perceber as variações quando se trata de pesos de cerca de 100 gramas, então, quando estivermos a tratar de pesos de 1 kg, a diferença necessária será da ordem de 100 g.

Foi um seu compatriota, o psicólogo Gustav Fechner, que refraseou as observações de Weber na forma como é atualmente conhecida: a sensação é proporcional ao logaritmo do estímulo. A ideia é relativamente simples: dado um estímulo (que no exemplo acima é o peso) E, seja S a sensação que este causa (ou seja, a perceção psicológica causada pelo estímulo). Desta forma $S = S(E)$, ou seja, a sensação é função do estímulo. Agora considere uma pequena variação do estímulo $\mathrm{d}E$. A obervação de Weber é de que esta variação, quando dividida pelo próprio valor do estímulo, tem um efeito constante na variação da sensação $\mathrm{d}S$, ou seja:

$$\mathrm{d}S = k\frac{\mathrm{d}E}{E} ,$$

onde k é uma constante experimental. A equação acima é um exemplo de equação diferencial, que ao ser resolvida implica em

$$S(E) = k \log E + C .$$

C é uma constante de integração. Fixando um valor mínimo para o estímulo capaz de causar alguma sensação, encontramos:

$$S(E) = k \log \frac{E}{E_0} ,$$

onde E_0 é o mínimo estímulo percetível, ou seja, tal que $S(E_0) = 0$. A equação acima é conhecida como *Lei de Weber-Fechner*. Veja a figura 1 na página seguinte.

Apesar de a motivação ter sido o trabalho de Weber sobre a perceção da diferença de pesos, a lei acima é válida para uma enorme variedade de situações. Por exemplo, ao fazer o

Figura 1: O médico Ernst Weber (esquerda) e o psicólogo Gustave Fechner (direita), alemães, descobridores da relação entre estímulo e sensação que leva o nome de ambos. Fonte: Wikimedia Commons.

mapa do céu, os gregos antigos classificaram as estrelas pelo seu brilho, no que é conhecido como "magnitude estelar". A magnitude de uma estrela é grosso modo proporcional ao logaritmo do seu brilho. Também o som é comumente medido em "decibéis", que é o logaritmo da intensidade da onda sonora (de facto, o "decibel" é uma unidade genérica que se aplica a todos os casos estudados).

Mas porquê esta relação? Será possível que, de alguma forma, isto otimize alguma característica essencial na nossa relação com o mundo exterior?

Pense que um amigo chegou a sua casa e, fascinado com o seu novo televisor, perguntou-lhe o preço. Apesar de o valor exato ser 1495,50 euros, é natural que a resposta seja "cerca de 1500 euros". Nós memorizamos (e, de facto, percebemos) os números numa escala muito mais grosseira do que a real, o que faz com que as sensações tenham sempre, de forma inerente, um erro. Evidentemente, o que nos interessa é o erro relativo, pois é muito mais grave para a nossa sobrevivência acharmos que estamos a ser perseguidos por 2, e não por 4, leões, do que errarmos de 98 para 100 predadores. Em ambos os casos o erro absoluto é o mesmo: dois.

Como discutido acima, apesar de os estímulos poderem ser contínuos, a sensação é medida em unidades discretas, onde a distância de um possível valor para o próximo é exatamente a menor diferença percetível. A questão é: qual será o conjunto discreto de sensações percetíveis que minimiza o erro das perceções?

A resposta há de depender, claramente, de como os estímulos são produzidos. Se estes forem produzidos maioritariamente num intervalo muito limitado, então o conjunto acima deve ser muito fino nas sensações resultantes destes estímulos e esparso fora deste. Então vamos supor que os estímulos são gerados com uma densidade de probabilidade G(E), que a nossa perceção se dá num conjunto finito de valores $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \ldots, \hat{S}_N$, definido dividindo em intevalos de igual tamanho o espaço das sensações admíssiveis (aquelas que conseguimos perceber de forma razoavelmente fidedigna). Como a relação entre estímulo e sensação é um-para-um, então existe um conjunto discreto de estímulos $\hat{E}_1 = F^{-1}(\hat{S}_1), \ldots, \hat{E}_N = F^{-1}(\hat{S}_N)$, onde a função F é a que relaciona o estímulo e a sensação (logaritmo, de acordo com a lei de Weber-Fechner). O erro médio na medição dos estímulos é medido somando, de forma ponderada por G(E), o erro por supor que o valor da sensação é dado por um dos elementos do conjunto discreto $\hat{E}_i$:

$$\mathrm{erro}(\hat{E}, G, r) = \mathbb{E}\left[\frac{|E - \hat{E}|^r}{E^r}\right] ,$$

onde $\hat{E}$ é o valor discreto representativo do estímulo E e $\mathbb{E}$ é o valor esperado do erro relativo.

Manipulando um pouco os conceitos, e na hipótese de que N é muito grande (ou seja, de que há muitos valores mensuráveis para as sensações), o artigo [1], provou que a relação entre E e S (dada por F) que minimiza o erro também satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E} = kE^{-r/(r+1)}G(E)^{1/(r+1)} .$$

O problema agora é o de estimar a distribuição de estímulos. No entanto, para uma grande gama de distribuição de estatísticas (incluindo, por exemplo, a transmissão de informações através das linguagens naturais), os estímulos seguem a chamada *lei de Zipf*. Esta é uma lei empírica, válida em todas as linguagens conhecidas (mesmo em algumas linguagens artificiais) que diz que a frequência da i-ésima palavra mais frequente na língua é proporcional a $1/i$. Não existe propriamente uma explicação para a prevalência desta lei, mas há um consenso sobre a sua prevalência, mesmo em situações muito mais gerais que a transmissão de informações a partir da linguagem natural. Com esta hipótese, ou seja, com $G(E) = E^{-1}$, encontramos

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E} = kE^{-1} ,$$

que é a mesma equação diferencial encontrada anteriormente. Desta forma, mostramos a ligação entre a lei de Zipf e a lei de Weber-Fechner, algo que não se supunha até então.

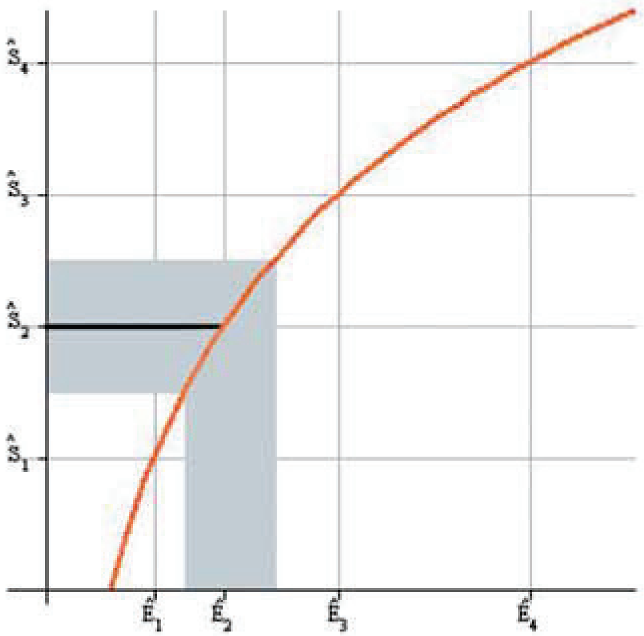

Figura 2: Relação logarítmica entre o estímulo (eixo *x*) e a sensação (eixo *y*). Note que as sensações são percebidas apenas num conjunto discreto $\hat{S}_1,\dots,\hat{S}_N$, que corresponde a estímulos $\hat{E}_1,\dots,\hat{E}_N$. Todos os estímulos na região sombreada correspondem à mesma sensação $\hat{S}_2$ O gráfico a vermelho indica a relação entre estímulo e sensação, que, pela lei de Weber-Fechner, é logarítmica. Nós medimos o valor no eixo *x* e invertendo a função deste gráfico, tentamos inferir o estímulo correspondente.

Para distribuições $G(S) = S^{\alpha}$ (uma lei de potência, também muito comum em distribuições estatísticas reais), encontramos uma relação que generaliza a lei de Weber-Fechner das escalas logarítmicas para as escalas de potência. A sua expressão exata fica como exercício. É interessante notar que as leis de magnitude estelar modernas, que generalizam as medições dos brilhos das estrelas para valores inimagináveis pelos gregos antigos, também seguem leis de potência (limitando-se ao caso logaritmo para as estrelas visíveis a olho nu); a escala de Richter, que mede os terramotos, estabelece uma relação entre o logaritmo da energia libertada no sismo e os seus efeitos, grosseiramente proporcionais ao valor na escala. Já a escala de Beauford, que tem funções parecidas para os ventos, relaciona os efeitos com uma certa potência da velocidade do vento.

REFERÊNCIAS

[1] Sun, J. Z., et al. "A Framework for Bayesian Optimality of Psychophysical Laws". doi:10.1016/j.jmp.2012.08.002 *Journal of Mathematical Psychology* (2012).