por **Fabio Chalub**
[Universidade Nova de Lisboa]

Um Fut-Teorema em Ano de Mat-Mundial

Em época de Mundial de Futebol, desviamo-nos um pouco da linha mestra desta secção: hoje, a "Linha de Frente" não é o último acontecimento da matemática, mas aquela composta por Cristiano Ronaldo, Simão e Deco!

Quando termina a temporada da Liga Portuguesa, não há dúvida de quem é o campeão, o segundo colocado etc., até ao doloroso último lugar. No entanto, no Mundial há sempre aquela incerteza, da qual só o vencedor escapa, sobre qual foi a real posição das outras equipas, aquelas que caíram antes do fim.

Figura 1: Uma "linha de frente" diferente.

A pergunta, na verdade é simples: será possível montar um *ranking* fidedigno das equipas num campeonato em que não jogam todos contra todos? Ou ainda, será possível montar tal *ranking* para um campeonato ainda em andamento? A resposta é "Sim!", como foi mostrado em 1993 pelo matemático James Keener. Para isto vamos recorrer a um dos mais interessantes teoremas da álgebra linear, o mesmo teorema que permite ao *Google* ordenar as páginas pela sua importância: o Teorema de Perron--Frobenius, que formulamos aqui de uma forma bastante restrita:

Considere uma matriz quadrada não nula M, de tamanho NxN, em que cada um dos seus elementos é não negativo. Então esta matriz possui um valor próprio positivo λ e um vector próprio v cujas entradas são todas não negativas. Ademais, se a matriz for irredutível, o vector próprio v tem entradas estritamente positivas, é único (a menos de múltiplos) e simples e o valor próprio λ é o maior valor próprio em módulo.

O vector próprio e o valor próprio descritos acima são chamados *dominantes*.

A matriz M pode ser escrita de várias maneiras. Por exemplo, ordenamos as equipas de 1 a N. O valor do elemento da matriz M_{ij} é 0, 1 ou 3 consoante o resultado, derrota, empate ou vitória, de i quando recebeu j em sua casa (podemos também definir 1, 2 ou 4, respectivamente, para diferenciar a derrota de um jogo que não houve; melhor ainda, podemos definir 1 quando não houve jogo e 2, 4 e 5 para os três possíveis resultados, evitando alguns problemas matemáticos das matrizes que têm entradas nulas). Vamos associar a cada equipa um *ranking* r_i que ainda não sabemos qual é e que modifica o número de pontos obtidos – a vitória contra um plantel bem colocado no *ranking* vale mais do que contra um que esteja no fim da tabela. Desta forma, o número de pontos obtidos pela equipa i é dado pela soma em todos os valores de j de M_{ij} vezes r_j. O resultado final deve ser proporcional ao próprio *ranking* e, portanto, $Mr=\lambda r$.

Aqui entra o teorema de Perron-Frobenius. Existe uma única maneira de colocar as equipas em ordem: o *ranking* é dado pelo vector próprio associado ao maior valor próprio, que está definido a menos de reescalonamentos.

Uma das hipóteses usadas é a de que a matriz M é irredutível. O que significa isto? Significa, basicamente, que o campeonato não se subdivide em torneios independentes. É isto que ocorre, por exemplo, na qualificação para o Mundial ou para o Europeu, onde há um certo número de grupos e não um cruzamento final entre os componentes de cada grupo. Mais precisamente no contexto discutido, uma matriz é irredutível se não for possível dividir as equipas em dois grupos A e B tal que nenhuma equipa de A jogue com B. A estrutura do Campeonato do Mundo faz com que esta hipótese seja satisfeita, no entanto, apenas após a final – não é possível usar a teoria para obter *rankings* parciais. Isto é diferente na Liga, por exemplo, em que após algumas rodadas já temos uma matriz irredutível.

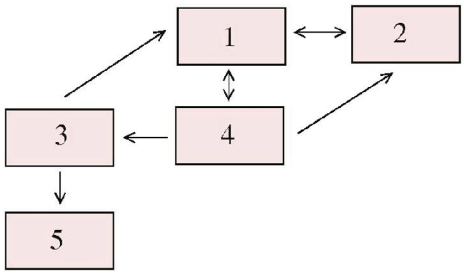

Figura 2: Matriz de ligações para uma Internet de 5 *sites*: o sistema de Perron-Frobenius usado pelo *Google* indica que o mais importante é o *site* 1, seguido pelos *sites* 2, 4, 3 e finalmente o *site* 5.

A *Google*, ao usar ideias semelhantes para o *ranking* de páginas, considerou uma matriz em que M_{ij} é diferente de zero sempre que houver um *link* da página j para a página i. Na verdade, adopta-se o valor $1/n$ em que n é o número de ligações a partir da página j. Para evitar a possibilidade de termos uma matriz redutível, soma-se uma matriz em que todas as entradas sejam idênticas a um pequeno valor.

Outra aplicação de ideias semelhantes é o cálculo da importância de uma revista científica. Usualmente calcula-se o "factor de impacto", basicamente o número médio de citações nos primeiros anos após a publicação dos seus artigos. Uma ideia mais sofisticada é a de usar o "*eigenfactor*", algo como o "factor próprio" da revista: a matriz M é obtida a partir do número de citações dirigidas da revista j para a revista i; depois segue-se o raciocínio anterior. Também neste caso é importante somar uma matriz de entradas positivas e idênticas para evitar o risco de as revistas científicas serem divididas em dois grupos que não se citam mutuamente.

E, afinal, como calcular o *ranking* a partir da matriz M? Para isto usa-se um método clássico em análise numérica. Escolhe-se um vector qualquer com todas as suas coordenadas positivas. Com probabilidade um, ao ser decomposto na base que diagonaliza a matriz M, caso esta exista (se não existir, fazemos o mesmo na base de Jordan da matriz), este possui um componente não nulo na direcção do vector próprio dominante. Obtemos sucessivas iterações deste vector u da seguinte maneira: calculamos Mu e depois normalizamos o vector obtido (serve qualquer método de normalização, sendo o mais útil na maioria das aplicações usar a norma da soma, ou seja, dividir o vector Mu pela soma dos seus componentes, todos não negativos). Seguindo este procedimento, o vector obtido aproximar-se-á do vector próprio. Assim temos o *ranking*.

Figura 3: Classificação final do Mundial de 2006 com base na seguinte pontuação: 1 ponto quando não há jogo, 2 para a derrota, 3 para o empate e 5 para a vitória.

O resultado dependerá de como montamos a matriz M, e mesmo num campeonato de todos contra todos não há nenhuma garantia de que o resultado seja o mesmo do oficial. No entanto, isto também é verdade para o sistema usual de ordenamento, ou seja, atribuir 3 pontos pela vitória e 1 pelo empate. Para diferentes pontuações, a classificação final pode ser diferente. Este facto não muda com o ordenamento baseado em Perron-Frobenius; no entanto, este permite uma maneira natural de estender o *ranking* para equipas que nunca se enfrentaram. M

Referências

Keener, James P. (1993). *The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams*, SIAM Review, Vol. 35(1), pp 80/93.