

O Papel das Representações na Compreensão em Matemática

António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Quase todas as formas de saber envolvem informação que é representada dos mais variados modos. Os professores apresentam-na usando diferentes técnicas de representação, como, textos, diagramas, simulações, modelos matemáticos, demonstrações práticas, que encerram em si uma vasta variedade de formas de representação mais específicas. O meio onde estamos inseridos é outra fonte de informação com uma grande variedade de formas de representação. Embora algumas tarefas possam ser realizadas utilizando uma única representação, muitas outras necessitam de combinar conhecimentos em diferentes formas ou têm que ser realizadas de uma forma mais eficiente integrando o uso de múltiplas representações em vez de uma só. Para que o conhecimento seja mais profundo aquilo que se aprende na escola deve ser combinado com o que se aprende ao interagir com o mundo que nos rodeia. Esta interacção gera uma grande diversidade de formas de representação.

O conhecimento e as representações aparecem assim fortemente ligados. Esta relação tem raízes na tradição filosófica podendo encontrar-se referências em vários filósofos, tais como Platão, Descartes ou Kant. A noção de representação é um conceito chave na filosofia do conhecimento, que se tem submetido a uma crítica sistemática. Segundo Rico (2000), todas as disciplinas cujo objecto é o estudo do conhecimento humano trabalham com as noções de representação e compreensão. Também Sierpinska no seu trabalho sobre Compreensão em Matemática refere as representações como as bases da compreensão. Reveste-se assim de especial interesse a clarificação destas noções, pelo que nesta comunicação serão abordadas algumas das suas características principais. Não se pretende fazer uma abordagem exaustiva, mas antes explicitar as componentes que podem contribuir para um melhor compreensão dos conceitos matemáticos na vertente da construção do conhecimento pelos alunos.

O conceito de representação

Para Rico (2000), representar é substituir, dando presença a algo que está ausente e portanto confirmar a sua ausência. A representação pressupõe assim uma dualidade representante-representado. Representa-se para tornar algo presente, algo esse que existe e é distinto e que é

substituído pela representação. A noção de representação tem assim subjacente algo objectivo que se representa.

Kaput (1987), na tentativa de definir representação considera que o conceito envolve duas entidades relacionadas, mas funcionalmente separadas. Um destes entes é denominado o *objecto representante* (símbolo ou representação) e o outro é o *objecto representado* (conceito) e considera implícita uma certa correspondência entre o mundo dos objectos representantes e o mundo dos objectos representados. Assim, qualquer especificação particular da noção de representação deveria descrever, pelo menos, cinco entidades:

- 1ª os objectos representados,
- 2ª os objectos representantes,
- 3ª que aspectos do mundo representado se representam,
- 4ª que aspectos do mundo representante realizam a representação,
- 5ª a correspondência entre ambos os mundos ou conjuntos.

Em muitos dos casos importantes um ou ambos os mundos podem ser entidades hipotéticas ou mesmo abstrações. No entanto nós podemos usar esta definição como medida de rigor de algumas representações propostas e como um meio de obter algum controlo sobre as diferentes utilizações que damos ao termo. Também é preciso ter em atenção que este tipo de definição pode ter uma leitura bastante diferente da noção de representação uma vez que parece ser possível defender um abordagem realista dos conceitos matemáticos, como objectos com existência própria nalgum mundo conceptual transcendente, aos quais temos acesso mediante as suas representações (Rico, 2000).

Diversas abordagens do conceito de representação

Ao longo da História foram feitas várias abordagens para explicar como é possível reproduzir na mente as experiências que nos chegavam da realidade exterior. Várias correntes defenderam diferentes paradigmas sem se chegar a consensos, até que por volta meados da década de 70 com o aparecimento da ciência cognitiva se gerou algum consenso em torno desta questão.

Hiebert e Carpenter (1992) baseiam-se nas noções de *representação interna* e *representação externa*, assumindo que o conhecimento é representado internamente e que estas representações internas estão estruturadas. Consideram que para pensar sobre as ideias matemáticas e comunicá-las necessitamos de as representar de algum modo. A comunicação requer que as representações sejam

externas, tomando a forma da linguagem oral, símbolos escritos, desenhos ou objectos físicos. Para pensar sobre as ideias matemáticas precisamos de representá-las internamente, por forma a permitir que a mente possa operar sobre elas.

Partindo do princípio que a ciência cognitiva proporciona uma abordagem útil para lidar com as questões de aprendizagem da Matemática, os autores consideram dois pressupostos para encarar as representações internas: (1) existem relações entre representações internas e externas e (2) as representações internas podem estar relacionadas ou ligadas umas com as outras de forma conveniente. Considera-se então que a natureza das representações internas é influenciada e moldada pela situação externa que começa a ser representada. Este pressuposto é aplicado a situações matemáticas supondo que a natureza das representações matemáticas externas influencia a natureza das representações matemáticas internas. É assim importante que se considerem ambas as representações, pois a forma de uma representação externa (materiais, figuras símbolos) com que o aluno interage faz a diferença na forma como ele representa a informação internamente. Inversamente a forma como o aluno gera ou lida com uma representação externa revela de alguma forma como é que ele representou essa informação internamente.

Para Hiebert e Carpenter (1992) as representações internas devem estar ligadas entre si. Dado que estas ligações apenas podem ser inferidas assume-se que elas são representações que são influenciadas pela actividade externa, ou seja, as conexões entre as representações internas podem ser estimuladas pelas conexões entre correspondentes representações externas. As conexões entre representações externas podem ser construídas pelo aluno entre diferentes formas de representação ou entre ideias relacionadas com a mesma forma de representação. As conexões entre representações internas, embora não sejam directamente acessíveis, podem considerar-se como redes de conhecimento onde algumas representações podem agrupar outras, formando uma hierarquia, ou podem estar estruturadas como uma teia onde os nós de ligação podem ser pensados como peças da informação representada e as ligações entre os nós representariam as conexões.

Kaput (1992), considera um *mundo de operações mentais* que é por vezes hipotético e um *mundo de operações físicas* que é frequentemente observável. Estes dois mundos interagem em direcções opostas, figura 1, embora de uma forma mais subtil se possa considerar que fazem parte de um processo cíclico.

A seta para cima na figura descreve dois tipos de acontecimentos: (1) interpretação activa deliberada (ou leitura) e (2) os processos menos activos, menos controlados conscientemente e

menos organizados para despertar fenómenos mentais por intermédio do material físico. A seta para baixo também descreve dois tipos de processos: (1) o acto de projectar a estrutura mental no material existente e (2) o acto de produzir novas estruturas (escrevendo), que inclui a elaboração física das já existentes.

As projecções ocorrem lendo e despertando como parte de um processo cíclico subjacente que combina os objectos de percepção e os conceitos. A distinção entre as projecções orientadas para baixo e os actos interpretativos orientados para cima tem por finalidade evidenciar os processos, nos quais esta distinção obtém o seu principal

impulso. No caso da orientação para baixo nós temos conteúdo cognitivo que procuramos exteriorizar com o objectivo de comunicar ou testar para validar. Os processos orientados para cima são baseados na intenção de usar algum material físico existente para ajudar o nosso pensamento.

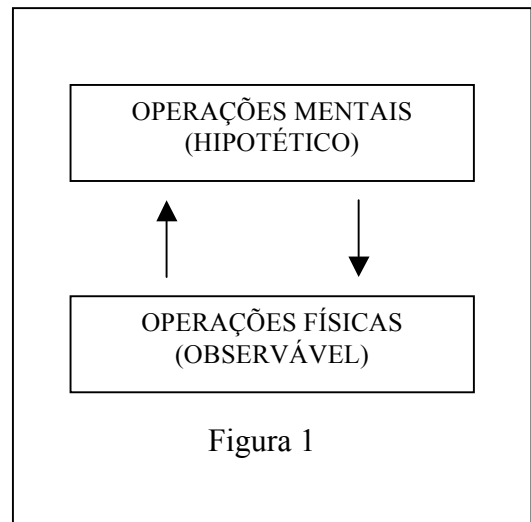


Figura 1

Sierpinska (1994), parte do trabalho de Ajdukiewicz que distingue dois tipos de representações: *imagens mentais* e *representações conceptuais*. As imagens mentais abrangem não só o visual mas também outras experiências dos sentidos como audição ou o olfacto. Estas imagens podem também basear-se em memórias ou sentimentos como a dor, alegria ou tristeza. As representações conceptuais consistem na definição ou descrição de alguma espécie e são por isso essencialmente verbais. Ela considera que esta categorização de representações mentais é muito simples e que raramente aparecem na realidade nesta forma tão simplificada e pura.

Sierpinska usa então o termo *representação "de procedimentos"* para definir uma outra categoria de representações que parece impor-se quando se estuda a compreensão da matemática nos alunos mais novos. Muitas vezes eles comportam-se como se a sua compreensão estivesse nos seus dedos em vez das suas mentes. A intenção de compreensão parece estar direccionada para a acção imediata com o sentimento de que se espera uma actividade de realização de tarefas. Estas representações baseiam-se nalguma espécie de esquemas de acções designados por procedimentos. Tem que haver no entanto uma *componente conceptual* nestas representações, pois estes procedimentos servem para manipular objectos abstractos, símbolos e são suficientemente gerais para poderem ser usados numa diversidade de situações. Sem a componente conceptual eles não

poderão ser considerados procedimentos. Podemos no entanto considerar que a sua componente conceptual pode ser mais relevante ou menos relevante.

Se a componente conceptual for menos relevante então nos actos de compreensão o nosso pensamento é direccionado para uma actividade que nós não podemos expressar de outra forma senão mostrando como se faz. Se ela for mais relevante então o sujeito tem pelo menos um esquema verbalizado da actividade. Usando a categorização de Brunner que pressupõe que as representações podem ser motoras, icónicas e simbólicas, Sierpinska considera que a categoria de representações processuais se pode ligar com a categoria das representações motoras de Brunner.

Processos envolvidos na representação

A compreensão tem sido considerada uma meta importante pelos professores de Matemática. Essa compreensão, tal como acontece, é um processo que ocorre na mente dos alunos, muitas vezes baseada numa longa sequência de actividades de aprendizagem durante a qual ocorrem e interagem uma grande variedade de processos mentais. Neste sentido descrevem-se de seguida alguns dos processos que estão envolvidos nas representações por forma melhor caracterizar o seu papel na compreensão dos conceitos matemáticos. Estes processos são considerados sobre o ponto de vista do pensamento matemático avançado.

1. Processos de representação

Dreyfus (1991), discutiu alguns processos de representação e suas características essenciais. Um desses processos refere-se às *representações simbólicas* que são consideradas como absolutamente indispensáveis na matemática moderna. Os símbolos envolvem relações entre os signos e os significados, servem para construir o conhecimento implícito das pessoas, o significado, que é explicitado em termos de símbolos. Deveremos no entanto ter em atenção que tem que haver algum significado associado com a noção antes do símbolo para que a noção possa ser usada.

Outro processo de representação prende-se com a *representação mental* de um dado objecto ou processo. Representar um conceito significa gerar um exemplo, uma imagem, ou um caso. Esta descrição é no entanto incompleta, pois não especifica se o caso gerado é simbólico ou mental nem nos indica o que significa gerar em termos dos processos pelos quais as representações mentais aparecem e são desenvolvidas. Temos assim que enquanto a representação simbólica é externamente escrita ou falada com o objectivo de tornar a comunicação mais fácil, a representação

mental refere-se aos esquemas internos ou imagens de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo.

A *visualização* é outro processo de representação, processo pelo qual as representações mentais podem ser criadas. Ela oferece-nos intuição e compreensão, surge como um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão dos conceitos matemáticos Domingos (1994).

Para Dreyfus o sucesso em matemática passa também por ter representações mentais ricas dos conceitos. Este processo de representação está relacionado com o facto de a representação conter vários aspectos do conceito interligados. O processo pode designar-se *por ligação entre múltiplas representações* e assume-se que as várias representações mentais do mesmo conceito devem complementar-se e eventualmente devem mesmo integrar-se numa única representação.

2. *Mudança de representações e tradução entre elas*

Embora seja importante ter várias representações de um conceito, a sua existência só por si, não é suficiente para tornar flexível o seu uso Dreyfus (1991). Para manejar com sucesso os conceitos nós precisamos que as várias representações estejam correcta e fortemente ligadas. Esta necessidade de mudar de uma representação para outra torna-se evidente sempre que a outra seja mais eficiente para o passo que pretendemos dar. O processo de mudar de representações está assim intimamente associado com o de representar. A mudança deve ser na maioria das vezes efectuada entre representações actuais. Segundo Dreyfus, o processo que está fortemente relacionado com a ligação de representações é tradução entre elas.

3. *Modelação*

O termo modelação refere-se normalmente à procura de uma representação matemática para um objecto não matemático ou processo. No caso do pensamento matemático avançado, modelar significa construir uma estrutura matemática ou uma teoria que contém as características essenciais do objecto, sistema ou processo a ser matematizado. O modelo pode assim ser usado para descrever o comportamento do objecto ou processo a modelar. O processo de representar é, de alguma forma, análogo ao de modelação, mas noutra nível. Na modelação a situação ou sistema é físico e o modelo é matemático; na representação o objecto a ser representado é a estrutura matemática e o modelo é a estrutura mental. Assim a representação mental está relacionada com o modelo matemático como o modelo matemático está relacionado com o sistema físico (Dreyfus, 1991).

Dimensões das representações

Como educadores temos de ter em consideração as representações que a informação (material de aprendizagem) pode ter, perceber as vantagens dessas representações e avaliar o uso de múltiplas representações no ambiente de aprendizagem. Um dos ambientes de aprendizagem que se começa a destacar são os *ambientes de aprendizagem baseados na tecnologia* (computadores, calculadoras) onde o uso de representações múltiplas e alternativas é bastante importante. Neste tipo de ambientes de aprendizagem o uso coordenado de múltiplas representações é por vezes considerado como um pré-requisito para a compreensão. Apresenta-se de seguida algumas das *dimensões* que servem para descrever representações nestes ambientes. Segundo de Jong *e outros* (1998) essas dimensões são: *perspectiva, precisão, modalidade, especificidade e complexidade*. Nem todas estas categorias são dimensões no sentido de poder classificar as representações enquadrando-as entre dois extremos. Embora estas dimensões possam ser usadas independentemente para descrever representações na prática há valores específicos das dimensões que podem agrupar-se.

A *perspectiva* refere-se a um ponto de vista teórico particular que está implícito no material apresentado. Os domínios onde trabalhamos podem ser vistos de diferentes perspectivas. Por exemplo, no domínio da Física, o estudo das oscilações harmónicas pode ser visto segundo três perspectivas diferentes: movimento, força e energia. De Jong *e outros* consideram que o termo ontologia está intimamente relacionado com perspectiva. Os aspectos ontológicos da representação do conhecimento referem-se sobretudo a decisões sobre como e o que se deve ver num determinado mundo. Assim a ontologia refere-se ao conteúdo, ao objecto e relações que nós usamos para representar um domínio e não tanto à linguagem pela qual os objectos e relações são representados.

A *precisão* refere-se ao nível de exactidão usado na descrição. A principal distinção que se pode fazer varia entre a informação quantitativa, exacta e a informação qualitativa que é menos exacta.

A *modalidade* está relacionada com o formato da representação, ou seja com a forma de expressão que é usada para mostrar a informação. Alguns exemplos de modalidades são: textos, animações, diagramas, gráficos, notações algébricas, etc..

A *especificidade* está relacionada com a economia de informação de uma representação, que encerra a ideia de que há propriedades computacionais nas representações. Esta dimensão estabelece algumas relações com a dimensão da modalidade no sentido em que é usada principalmente em estudos que enfatizam os benefícios das representações gráficas.

Por último a *complexidade* que é uma dimensão que se refere essencialmente à quantidade de informação que está presente na representação. Muitos ambientes de aprendizagem são baseados em modelos complexos que, segundo de Jong e outros, devem ser apresentados aos alunos através de passos discretos, através da introdução das novas variáveis em cada passo, por forma a que a sequência natural progrida gradualmente para o modelo final.

Conclusão

As noções de representação e de compreensão desempenham um papel fundamental quando pretendemos estudar o conhecimento matemático. Embora vários autores utilizem nomenclaturas diferentes para classificar as representações, estão sempre subjacentes dois mundos: o das representações mentais e o das representações externas. Estes mundos interagem criando novas representações que se destacam nos processos de construção dos conceitos e portanto são importantes para o ensino, aprendizagem e comunicação do conhecimento. O aparecimento de ambientes de aprendizagem baseados na tecnologia proporciona a utilização coordenada de múltiplas representações, pelo que se torna necessário descrever essas representações recorrendo às suas dimensões com o objectivo de melhorar a compreensão dos alunos.

Referências

- Domingos, A. (1994). A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações. Em Associação Professores Matemática (Ed.), pp. 234). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em David Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11, pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.
- Hiebert, J. e Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Em Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
- Jong, T. d. e outros. (1998). Acquiring knowledge in science and mathematics: the use of multiple representations in technology-based learning environments. Em Maarten W. van Someren, Peter Reimann, Henny P. A. Boshuizen e Ton de Jong (Ed.), *Learning with multiple representations* (pp. 9-40). Oxford: Pergamon.
- Kaput, J. J. (1985). Representation and problem solving: methodological issues related to modeling. Em Edward A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 381-398). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. Em Claude Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. Em Douglas a: Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Comunicação apresentada no IV Simposio SEIEM: Huelva.
- Sierpiska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Flamer Press.